Kwantum Wereld Experimenten

Ultraviolet catastrophe

Het probleem

Bekijk een zwarte straler als een trilholte 'gevuld' met electromagnetische straling in thermisch evenwicht bij temperatuur T. Het aantal staande golven in een frequentie-interval $f, f + df$ per eenheid van volume:

$$N(f)df = \frac{8\pi f^2 df}{c^3}$$

De gemiddelde energie per staande golf wordt *klassiek* gegeven door equipartitie van energie (de 'nulde' wet van de thermodynamica):

$$E_{gem} = kT$$

De energie in een frequentie-interval $f, f + df$ per eenheid van volume:

$$U(f)df = \frac{8\pi f^2 kT df}{c^3}$$

Dit is de Raleigh-Jeans formulering. $U(f)df$ gaat naar oneindig als f naar oneindig gaat: de UV catastrofe

Planck

Het aantal staande golven is hetzelfde, maar iedere oscillator kan slechts discrete energie hebben.

$$E_n = nhf(met\ n = 0, 1, 2, \dots)$$

. Voor een set van oscollatoren wordt de gemiddelde energie

$$E_{gem} = \sum_n p_n \varepsilon_n,$$

waarbij p_n de waarschijnlijkheid weergeeft dat een oscillator de energie ε_n heeft. Voor p_n nam Planck de Maxwell-Boltzmann verdeling (*dat is niet juist!*).

$$\frac{e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}}{\sum_n e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}} = \frac{x^n}{\sum_n x^n} \text{ met } x \equiv e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \rightarrow$$

$$U(f)df = \frac{8\pi f^2 df}{c^3}\left(\frac{\sum_n nhfx^n}{\sum_n x^n}\right) \tag{1}$$

Als $hf \gg kT$ is $x \ll 1$
kunnen we de volgende ontwikkelingen gebruiken:

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_n x^n$$

en

$$x\frac{d}{dx}\sum_n x^n = \sum_n nx^n$$

Toegepast op 1:

$$U(f)df = \frac{8\pi hf^3df}{c^3}\frac{x\frac{d}{dx}(1-x)^{-1}}{(1-x)^{-1}}$$

$$= \frac{8\pi hf^3df}{c^3}\frac{x}{1-x}^{*}$$

$$= \frac{8\pi h}{c^3}\frac{f^3xdf}{e^{\frac{hf}{kT}}-1}$$

Opmerking: Dit is het goede antwoord, maar met de kennis van nu kunnen we zeggen dat de afleiding onjuist is. De energie van een oscillator kan de waarde $(n + 1/2)hf$ aannemen en voor fotonen geldt de Bose-Einstein verdeling:

$$p(f) = \frac{1}{e^{\frac{hf}{kT}}-1}$$

De uv-catastrophe is hiermee verdwenen. Als $f \to \infty$, dan $x \to 0$ vgl*: $u(f)df \to 0$

Anders gezegd: $x \to 0$, $p_n \to 0$; om p_n substantieel te houden moet òf f niet te groot zijn òf T niet te laag. Bij een bepaalde temperatuur is er een bovengrens van de frequenties die bijdragen.

In hedendaags jargon: de bezettingsgraad van toestanden van een oscillator is temperatuurafhankelijk; toestanden waarvoor de energie groter is dan kT doen niet mee.